EME

FIATAL MŰSZAKIAK
TUDOMÁNYOS ÜLÉSSZAKA XIX.

Kolozsvár, 2014. március 20–21.

SNÓBLIZÁS SAKKTÁBLÁN

MATCHING PENNIES ON CHESSBOARD

VARGA Levente

MTA TTK MFA (Magyar Tudományos Akadémia, Természettudományi Kutatóközpont, Műszaki Fizikai és Anyagtudományi Intézet), Magyarország, 1121 Budapest, Konkoly Thege M. út 29-33., Telefon: +36-1-3922222, Fax: +36-1-3922226, vargal@mfa.kfki.hu

Abstract

An evolutionary game, by name matching pennies game, is studied with two types of players located on a chessboard. Each player’s payoff comes from games with their four neighbors. The players can update their own strategies with the Glauber type dynamical rule. This dynamics drives the system into a stationary state. In this system the two strategies are present with the same probability without correlation between the nearest neighbors while a weak negative correlation is presented between the second and third neighbors. These observations are confirmed by approximative methods.

Keywords: evolutionary game theory

Összefoglalás

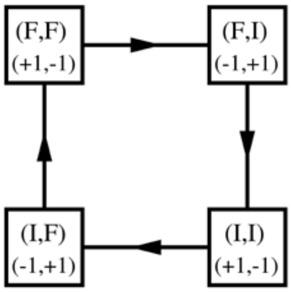
Egy evolúciós játék, név szerint snóblizás tanulmányozása sakktáblára helyezett kétféle játékossal. Minden játékos nyereménye a négy szomszédjával játszott játékokból származik. A játékosok a Glauber típusú dinamika szabályai szerint mosósíthatják saját stratégiájukat. Ez a dinamika egy stabil állapotba vezérli a rendszert, amelyben azonos valószínűséggel fordul elő a két stratégia. A korreláció hiánya figyelhető meg a közvetlen szomszéd esetében és egy gyenge negatív korreláció jelentkezik a másod és harmad szomszédok között. Ezt a megfigyelést az átlagtér közelítés módszere is alátámasztotta.

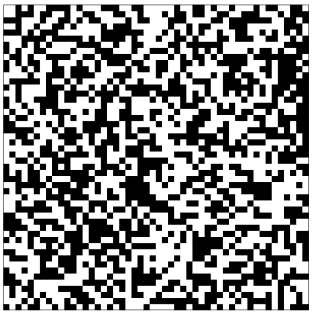
Kulcsszavak: evolúciós játékelmélet

1. Bevezetés

A snóblizás napjainkban már kevésbé használatos, régebben azonban ezzel az egyszerű játékkal nyerhettük el játékostársunk pénzét. A játékszabályoknak megfelelően két játékos egyszerre döntötte el, hogy a tenyerében levő azonos pénzérme fej vagy írás oldalát fordítja felfelé. A játékosok megállapodása szerint, ha a két pénzérme azonos oldala volt felül, akkor az egyik, ellenkező esetben pedig a másik, játékos nyert és az övé lett mindkét érme.

A hagyományos snóbli játék menetét megváltoztatva úgy, hogy az ismétlődő játéknál a játékosok nem egyszerre, hanem felváltva, vagy véletlen sorrendben, módosíthatják az előző stratégiájukat, az 1. ábra bal oldalán látható folyamatábra alakul ki. A folyamatábrán látható négyzetekben a különböző lehetőségek és a hozzájuk tartozó nyeremények vannak feltüntetve. A lehetséges választásokat összekötő élek és az éleken szereplő nyilak a változásokat, illetve azok irányát jelzik. A játék egyik pillanatában az egyik játékos nyerő helyzetben van és a másik játékos vesztésre áll, aki, ha változtat a stratégiáján nyerő pozícióba kerül. Így az elégedetlenség és a nyereségvágy egyfajta örökmozgóként fenntartja a ciklikus ismétlődést. A módosított snóblihoz hasonló játékmodellek segítségével jól leírható például a vevők és az eladók közötti kölcsönhatás [1] és ez a modell adja, a van Valen által biológiai rendszerekre megfogalmazott sötét királynő (Red Queen) hipotézis hajtóerejét [2, 3].





***1. ábra.* (bal oldal)** *Kétszemélyes snóbli játék folyamatábrája.* **(jobb oldal)** *Az evolúciós snóbli játék esetében a fej (világos) és az írás (sötét) stratégiák térbeli eloszlásáról készített pillanatfelvétel 50x50-es négyzetrácson.*

Evolúciós játékelméletről az 1970-es évektől beszélhetünk. Ekkor alakult ki, hogy a biológusok a játékelmélet eszközeivel írták le a darwini kiválasztódást. Matematikai formulák segítségével fejezték ki a fajok utódlétrehozó képességét [4].

A legegyszerűbb sokszereplős evolúciós játékelméleti modellek esetében a játékosok egy négyzetrácson helyezkednek el. A hagyományos játékelméleti eszközöknek megfelelően a játékosok és a szomszédjaik közötti párkölcsönhatást egy nyereménymátrix segítségével adjuk meg [5]. Az evolúciós folyamat során a véletlenül kiválasztott játékos a rendelkezésére álló stratégiák közül kiválaszt egyet, majd ezt használva játszik egy-egy játékot mindegyik szomszédjával. Ha az új stratégia magasabb nyereményt biztosít, akkor a játékos nagy valószínűséggel áttér új stratégiára. A kiválasztott játékosok egymást követően módosíthatják stratégiájukat egyéni nyereményük növelése érdekében.

Jelen kutatásban az evolúciós snóbli játék által leírt kölcsönhatást tanulmányozzuk, ahol kétféle, A és B típusú játékost különböztetünk meg. Ezek a játékosok egy négyzetrácson foglalnak helyet, amely két egyenértékű alrácsra van bontva, hasonlóan, mint a világos és sötét négyzetek a sakktáblán. Ebben az esetben az egyik típusú játékos a szomszédos stratégiák egyezésével, míg a másik játékos a stratégiák különbözőségével nyer. A sakktábla elrendezés bevezetése következtében minden játékos a négy ellenkező típusú szomszédjával játszik. A továbbiakban a snóbli játék stratégiák eloszlására kifejtett hatását tanulmányozzuk. A zajszint változását a Glauber típusú dinamika szabályai szerint írjuk le. Valamint demonstráljuk a véletlen stratégiai eloszlás és a kölcsönhatás eredményeként a térbeli elrendeződésen kialakult gyenge korrelációt.

2. Modellek és módszerek

A bevezetőben leírt kétalrácsos struktúra a játékosokat két $x \in X$ és $y \in Y$ csoportba osztja. Minden játékosnak $z = 4$ ellenkező típusú ($x + \delta \in Y$ és $y + \delta \in X$), közvetlen szomszédja van. A játékosok stratégiája kétdimenziós egységvektorral, nyereményük pedig a következő összegekkel fejezhető ki:

$$s_x, s_y = F = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ u_x = \sum_{\delta} s_x \cdot A s_{x+\delta},\ u_y = \sum_{\delta} s_y \cdot B s_{y+\delta} \qquad (1)$$

ahol az összegzést a négy közvetlen, ellenkező típusú szomszéddal játszott snóblizás eredményeként kapjuk. Az *(1)* egyenletben szereplő A és B mátrixok az X és Y alrácshoz tartozó játékosok nyereménymátrixai, amelyek a snóbli játék esetében a következők:

$$A = \begin{pmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & +1 \\ +1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

A két mátrix összegéből $(A + B = 0)$ látható, hogy ez egy nulla-összegű játék, egyetlen kevert Nash egyensúllyal, amelyben mindkét játékos ½ valószínűséggel választhat a fej és írás stratégiák közül. A játék során egy elemi lépésben véletlenül kiválasztott x játékos a következő egyenlet szerint módosítja a stratégiáját, az s_x stratégiáról az $s_x^{'}$ stratégiára vált:

$$W\left(s_x \to s_x^{'}, s_{-x}\right) = \frac{1}{1 + \exp\left[\frac{\left(u_x - u_x^{'}\right)}{K}\right]}, \tag{4}$$

ahol a többi játékos stratégiája s_{-x} változatlan marad, és a K paraméter jellemzi a zaj nagyságát

A rendelkezésünkre álló modellek segítségével egy $N = L \times L$ négyzetrácson elkészített periodikus határfeltételekkel rendelkező rendszert Monte Carlo (MC) szimulációval elemzünk. A rendszer mérete $N = 2.5 \cdot 10^5$ és $N = 4 \cdot 10^6$ között változik. A szimuláció egy véletlen kiindulási állapotból indul. A statisztikai adatokat $t_{th} = 2 \cdot 10^3 MCS$ és $t_{th} = 10^6 MCS$ között változó termalizációs idő, valamint $t_s = 5 \cdot 10^4 MCS$ és $t_s = 3 \cdot 10^6 MCS$ közötti mintavételezési idő után kapjuk. Egy időegységen belül (MCS) minden játékosnak lehetősége van stratégiája mosósítására.

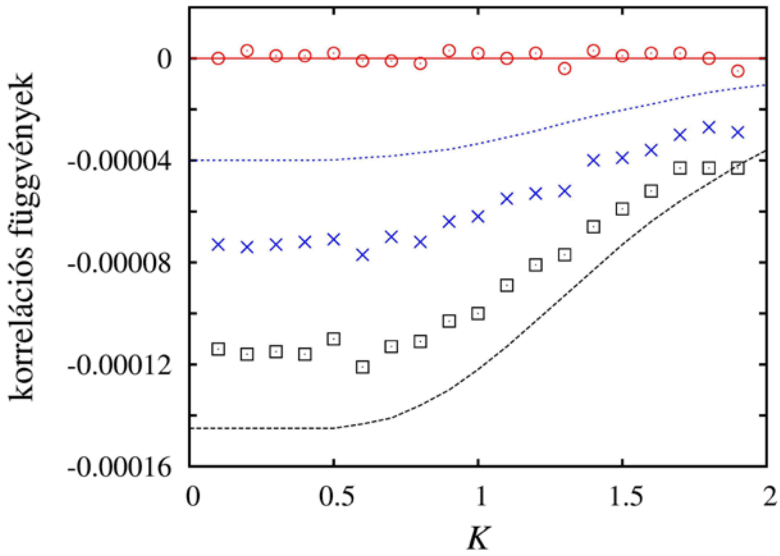
A korreláció elemzésére a MC szimuláció mellett a dinamikus klaszter közelítést is felhasználjuk [6]. A módszer segítségével kiszámoljuk a konfigurációs valószínűséget egy n pontos klaszterre. Esetünkben egy 9 pontos átlagtér közelítés során numerikus egyenleteket oldunk meg, ahol $2 \times 2^9 = 1024$ változó írja le két darab 3×3-as blokk lehetséges stratégiáinak valószínűségét. A konfigurációs valószínűségek segítségével adhatunk analitikus közelítést a fenti szimulációs eredményekre.

A modell alapján felépített rendszerben a játék során bármelyik pillanatban az 1. ábra jobb oldalához hasonlóan teljesen véletlen elosztást látunk a stratégiák térbeli elhelyezkedéséről.

3. Korrelációk a snóbli játékban

A MC szimuláció folyamán a rendszer egy stabil állapotba fejlődik, ahol a két stratégia a két alrácson azonos valószínűséggel van jelen, ahogy azt az előre jelzett eredmények mutatták. Vizuálisan nem figyelhetjük meg a korreláció jelenlétét a négyzetrácson kapott stratégiai eloszlás ábrázolásával. Azonban a szimuláció igazolta a korreláció hiányát a közvetlen szomszédok esetében, minden K értékre, ahogy azt a 3. ábrán megfigyelhető körök mutatják. Az ábrán szereplő négyzetek és X-ek azt mutatják, hogy kialakul egy gyenge negatív korreláció a másod és harmad szomszédok között.

A szimuláció mellett alkalmazott 2 pontos és 4 pontos átlagtér közelítés esetében szintén nem volt látható a korreláció. Ezután következett a 9 pontos átlagtér közelítés. Ezen a szinten már jelen van a korreláció, ahogy azt a 3. ábrán látható folytonos, szaggatott és pontozott vonalak is mutatják. Jól látható, a minőségi megegyezés az előrejelzés és a szimuláció eredményei között.



3. ábra. *A korrelációs függvények ábrázolása a K függvényében. A körök szemléltetik a korreláció hiányát a közvetlen szomszédoknál, a négyzetek (X-ek) pedig a korreláció mértékét a másod (harmad) szomszédok esetében. A folytonos, szaggatott és pontozott vonalak ábrázolják a kilenc pontos közelítés által meghatározott korrelációs elméleti előrejelzést az első, másod és harmad szomszédok között.*

4. Összefoglaló

A kutatásaink során a sokszereplős snóbli játékot tanulmányoztuk négyzetrácson a Glauber típusú dinamika szabályai szerint. Eredményként a játékosok térbeli elrendeződésével és egymás közti kölcsönhatásával a köztük fellépő gyenge negatív korreláció jelenlétét mutattuk ki analitikus és szimulációs módszerek segítségével. A kutatás további részében véletlen szabályos gráfon is megvizsgáltuk a modellt. A kapott eredmények hasonlóak a négyzetrácson kapott eredményekhez, azzal a kivétellel, hogy a véletlen szabályos gráfon a harmad szomszédok közötti korreláció eltűnik. Előzetes eredményekből arra következtethetünk, hogy a korreláció és a mikroszkopikus viselkedés is lényegesen változik, ha más játék komponenseket is használunk a snóblizás mellett.

Köszönetnyilvánítás

Kutatásaink támogatásáért köszönettel tartozunk a John Templeton Alapítványnak (6-4516-2012).

Irodalom

[1] D. Friedman, Econometrica **59**, 637 (1991).
[2] L. van Valen, Evolutionary Theory **1**, 1 (1973).
[3] L. van Valen, Evolutionary Theory **4**, 129 (1980).
[4] Maynard Smith J., *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press, Cambridge (1982).
[5] J. von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behaviour*, Princeton University Press, Princeton (1944).
[6] G. Szabó and G. Fáth, Phys. Rep. **446**, 97 (2007).